ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ THÁI HÀ

ĐỘ DÀI CỦA MỘT SỐ PHÂN TÍCH MA TRẬN TRÊN VÀNH CHIA

Ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã ngành: 9460104

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TP. Hồ Chí Minh - 2025

Công trình được hoàn thành tại
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. Mai Hoàng Biên

Phản biện 1: PGS.TS. Lê Anh Vũ

Phản biện 2: PGS.TS. Phan Hoàng Chơn

Phản biện 3: PGS.TS. Phan Thanh Toàn

Phản biện độc lập 1: miễn

Phản biện độc lập 2: miễn

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo
họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
vào hồi ... giờ ... ngày ... tháng ... năm 2025

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

– Thư viện Khoa học Tổng hợp TP. HCM

– Thư viện Đại học Quốc gia TP.HCM

– Thư viện Trường Đại học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

Mục lục

Chương 1. MỞ ĐẦU

Nội dung trọng tâm của luận án là phân tích các ma trận có hệ số trên vành chia. Cụ thể, chúng tôi tập trung vào việc phân tích ma trận thành tích của các ma trận đối hợp, tích của các hoán tử đối hợp và phân tích một lớp ma trận vô hạn, đó là các ma trận thuộc nhóm Vershik–Kerov. Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu ma trận trên vành chia quaternion thực $\mathbb{H}$, một vành chia có các kết quả gần với trường.

Kết quả về ước lượng độ dài đối hợp của ma trận trên trường được chỉ ra từ năm 1976. Cụ thể, theo [5, Định lý], giả sử F là trường và $A \in \mathrm{GL}_n(F)$. Nếu $\det A = \pm 1$ thì A có thể biểu diễn thành tích của nhiều nhất 4 ma trận đối hợp và 4 là số tốt nhất. Năm 2019, khi [4] xuất bản, [4, Định lý 2.1] đã mở ra một kỹ thuật mới trong việc phân tích ma trận trên vành chia. Từ đó, nghiên cứu của chúng tôi đã tập trung vào hướng này. Kết quả là độ dài hoán tử đối hợp của ma trận trong nhóm con $\mathrm{IL}_n(D)$, nhóm sinh bởi các ma trận đối hợp trong $\mathrm{GL}_n(D)$ đã được ước lượng. Nội dung này được công bố trong [III].

Một hoán tử của các ma trận đối hợp cũng có thể được biểu diễn thành tích của hai ma trận đối hợp. Vì vậy, chúng tôi ước lượng độ dài của hoán tử đối hợp. Quá trình nghiên cứu cho thấy [9, 16] đã chứng minh rằng, nếu F là trường có đặc trưng khác 2 thì $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(F)) = 2$. Sau đó, chúng tôi ước lượng độ rộng hoán tử đối hợp trên trường F có đặc trưng 2 và kết quả trong trường hợp này cũng là $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(F)) = 2$. Kết quả này được công bố trong [VI]. Cuối cùng, độ rộng hoán tử đối hợp đã được ước lượng trên vành chia trong [III] và trên đại số chia trong [II].

Ngoài ra, một số phân tích khác của ma trận thực sự thu hút chúng tôi. Cụ thể là phân tích ma trận thành tích các hoán tử lũy đơn chỉ số 2 và thành tích các hoán tử đối hợp lệch. Chúng tôi tiếp cận hướng nghiên cứu này với vành chia có số chiều nhỏ nhất, vành chia quaternion thực $\mathbb{H}$. Theo dòng lịch sử, vào năm 1991, J. H. Wang và P. Y. Wu trong [15, Định lý 3.5] đã chỉ ra rằng $\omega_{\mathcal{CU}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) \leq 4$. Đến năm 2021, X. Hou [8, Định lý 1.1] đã cải thiện kết quả này khi chứng minh rằng $\omega_{\mathcal{CU}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})) = 2$. Kỹ thuật được sử dụng trong [8] có thể áp dụng được cho các trường đóng đại số, không thể áp dụng cho các trường tổng quát. Trước hết, chúng tôi đã đưa ra một ví dụ để minh họa rằng kết quả trong [8] không còn đúng trên vành chia quaternion thực $\mathbb{H}$. Sau đó, độ rộng hoán tử lũy đơn chỉ số 2 cho nhóm $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ đã được ước lượng và công bố trong [V].

Liên quan đến độ rộng hoán tử đối hợp lệch, vào tháng 12 năm 2024, X. Hou [7] chỉ ra rằng nếu F là trường có ít nhất bốn phần tử và $n \geq 1$ thì $\omega_{\mathcal{CSI}}(\mathrm{SL}_{2n}(F)) \leq 2$. Trong nghiên cứu của chúng tôi, độ dài hoán tử đối hợp lệch trong $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ cũng được ước lượng với kết quả là $\omega_{\mathcal{CSI}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})) \leq 2$. Kết quả này được trình bày chi tiết trong [6].

Liên quan đến việc phân tích ma trận vô hạn thuộc nhóm Vershik-Kerov, chúng tôi đã đưa ra phiên bản trên vành chia của [1, Định lý 1.4]. Kết quả này được công bố trong [I].

CHƯƠNG 2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Đầu tiên, chúng tôi nhắc lại một kỹ thuật mà được sử dụng thường xuyên trong luận án. Mục (i) trong Bổ đề 2.3.10 là một trường hợp đặc biệt của [4, Định lý 2.1]. Trước năm 2019, kết quả này đã được chứng minh cho các ma trận trên trường. Sau khi E. A. Egorchenkova và N. L. Gordeev công bố kết quả, các phân tích ma trận trên vành chia trong luận án đều dựa trên nội dung đó.

Bổ đề 2.3.10. *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Giả sử ma trận $A \in \mathrm{SL}_n(D) \setminus Z(\mathrm{SL}_n(D))$. Khi đó,*

(i) *Tồn tại $Q \in \mathrm{GL}_n(D)$ sao cho $Q^{-1}AQ = LHU$, trong đó ma trận $L \in \mathbb{LT}_n(D)$, $U \in \mathbb{UT}_n(D)$ và $H = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, h)$ với $h \in D'$.*

(ii) *Tồn tại $P \in \mathrm{GL}_n(D)$ sao cho $P^{-1}AP = XYZ$, trong đó ma trận $X \in \mathbb{LT}_n(D)$, $Y \in \mathbb{UT}_n(D)$ và $Z = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, z)$ với $z \in D'$.*

Bổ đề dưới đây cho chúng tôi cơ sở để chéo hóa ma trận tam giác có hệ số trên đại số chia.

Bổ đề 2.4.1 ([3, Định lý 8.2.3])**.** *Cho D là đại số chia và $n \geq 2$. Giả sử $A \in \mathrm{GL}_n(D)$. Nếu $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ là n trị riêng phải của A và đôi một không liên hợp thì A đồng dạng với ma trận đường chéo* $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Dựa trên Bổ đề 2.4.1, chúng tôi chỉ ra dạng ma trận tam giác với hệ số trên đại số chia có thể chéo hóa được.

Bổ đề 2.4.3 ([II, Bổ đề 3.2])**.** *Cho D là đại số chia và $n \geq 2$. Nếu A là ma trận tam giác có các phần tử trên đường chéo chính*

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \in D$ *đôi một không liên hợp thì* A *đồng dạng với ma trận đường chéo* $\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Hai bổ đề dưới đây cung cấp cách chọn các phần tử trong quá trình phân tích ma trận với hệ số trên đại số chia vô hạn, từ đó đưa ra các ước lượng về độ dài hoán tử đối hợp của ma trận tốt hơn so với trên vành chia.

Bổ đề 2.4.5 ([I, Bổ đề 2.3])**.** *Cho* D *là đại số chia vô hạn với tâm* F *và* $\{a_i\}_{i\geq 1}$ *là dãy phần tử trong* D*. Khi đó, tồn tại dãy* $\{\alpha_i\}_{i\geq 1}$ *các phần tử trong* F *sao cho* $\{\alpha_i a_i\}_{i\geq 1}$ *là dãy các phần tử đôi một không liên hợp trong* D^*.

Bổ đề 2.4.6 ([VII, Bổ đề 5])**.** *Cho* D *là đại số chia vô hạn với tâm* F *và* $n \geq 1$*. Giả sử các phần tử* $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *đôi một không liên hợp trong* D^**. Khi đó, tồn tại* $\alpha \in F^*$ *sao cho các phần tử* $\alpha g_1, \alpha g_2, \ldots, \alpha g_n, (\alpha g_1)^{-1}, \ldots, (\alpha g_n)^{-1}$ *đôi một không liên hợp.*

Chương 3. PHÂN TÍCH MA TRẬN THÀNH TÍCH CÁC MA TRẬN ĐỐI HỢP

Trong chương này, các vấn đề liên quan đến phân tích ma trận có hệ số trên vành chia thành tích các ma trận đối hợp được nghiên cứu. Trước tiên, chúng tôi trình bày điều kiện cần và đủ để một ma trận trên vành chia là tích của các ma trận đối hợp theo định thức Dieudonné. Tiếp theo, độ dài đối hợp của ma trận trên vành chia được ước lượng. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra đánh giá tốt hơn về độ dài này trên đại số chia. Những kết quả trong chương này đã được công bố trong [III].

Bổ đề 3.2.1 ([10, Định lý 2.6, Chương VII])**.** *Cho D là vành chia và $m, n \geq 1$. Giả sử $A \in \mathrm{M}_n(D)$. Khi đó, hạng của A bằng r nếu và chỉ nếu tồn tại $P, Q \in \mathrm{GL}_n(D)$ thỏa mãn* $PAQ = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Từ Bổ đề 3.2.1, chúng tôi chỉ ra được dạng của ma trận đối hợp A dựa trên hạng của $A + \mathrm{I}$.

Mệnh đề 3.2.3 ([III, Mệnh đề 2.3])**.** *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Nếu $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ là ma trận đối hợp và hạng của ma trận $A + \mathrm{I}_n$ bằng r thì A đồng dạng với ma trận*

(i) $\mathrm{I}_r \oplus (-\mathrm{I}_{n-r})$ *nếu vành chia D có đặc trưng khác 2.*

(ii) $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{n-2r} \end{pmatrix}$ *nếu vành chia D có đặc trưng bằng 2.*

Hơn nữa, nếu A là tích các ma trận đối hợp thì $\det(A) = \overline{\pm 1}$.

Sau đó, chúng tôi đã mô tả được nhóm con sinh bởi các ma trận đối hợp $\mathrm{IL}_n(D)$ theo định thức Dieudonné.

Mệnh đề 3.2.5. *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Khi đó,*

$$\mathrm{IL}_n(D) = \{A \in \mathrm{GL}_n(D) : \det(A) = \overline{\pm 1}\}.$$

Dưới đây là các kết quả hỗ trợ việc ước lượng độ dài đối hợp của ma trận trên vành chia. Bổ đề 3.3.1 chỉ ra phương pháp phân tích ma trận chéo dạng $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, s)$, trong đó s là hoán tử.

Bổ đề 3.3.1. *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Nếu $s = uvu^{-1}v^{-1}$, trong đó $u, v \in D^*$ thì $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, s) \in \mathrm{GL}_n(D)$ là tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp.*

Bổ đề 3.3.2 ([12, Mục 4′, Trang 302])**.** *Cho trường F và $n \geq 2$. Giả sử $A \in \mathrm{GL}_n(F)$. Nếu tồn tại các số nguyên dương k, m sao cho*

$$(A - \mathrm{I}_n)^k (A + \mathrm{I}_n)^m = 0$$

thì $\ell_{\mathcal{I}}(A) \leq 2$.

Dựa trên Bổ đề 3.3.2, độ dài đối hợp của ma trận tam giác với các phần tử trên đường chéo bằng 1 hoặc -1 được ước lượng và kết quả trình bày dưới đây.

Mệnh đề 3.3.4 ([III, Bổ đề 4.3])**.** *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Nếu $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ là ma trận tam giác có các phần tử trên đường chéo chính là 1 hoặc -1 thì $\ell_{\mathcal{I}}(A) \leq 2$.*

Dựa trên những kết quả đã có, chúng tôi ước lượng độ rộng đối hợp của nhóm con $\mathrm{IL}_n(D)$, nhóm sinh bởi các ma trận đối hợp của nhóm $\mathrm{GL}_n(D)$.

Định lý 3.3.5 ([III, Định lý 4.5])**.** *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Khi đó, nếu $\omega_{\mathcal{C}}(D') < \infty$ thì $\omega_{\mathcal{I}}(\mathrm{IL}_n(D)) \leq 4 + 4\omega_{\mathcal{C}}(D')$.*

Để ước lượng kết quả về độ dài đối hợp trên đại số chia, chúng tôi phân tích một ma trận đường chéo cấp 2. Sau đó, dựa trên Bổ đề 2.4.5, ước lượng độ dài của phân tích này.

Bổ đề 3.4.1 ([III, Bổ đề 5.2])**.** *Cho D là vành chia. Với mỗi $a \in D^*$, ma trận* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *là tích nhiều nhất hai ma trận đối hợp trong* $\mathrm{GL}_2(D)$.

Trên đại số chia, chúng tôi thu được những kết quả tốt hơn trong việc phân tích ma trận thành tích của các đối hợp. Cụ thể là:

Định lý 3.4.2 ([III, Định lý 5.3])**.** *Cho D là đại số chia không giao hoán thỏa mãn $\omega_{\mathcal{C}}(D') = s < \infty$ và $n \geq 2$. Giả sử $A \in \mathrm{SL}_n(D)$. Nếu $A \notin Z(\mathrm{SL}_n(D))$ thì $\ell_{\mathcal{I}}(A) \leq 4s$.*

Hệ quả 3.4.3 ([III, Định lý 5.3])**.** *Cho D là đại số chia không giao hoán và $n \geq 2$. Nếu $\omega_{\mathcal{C}}(D') < \infty$ thì $\omega_{\mathcal{I}}(\mathrm{IL}_n(D)) \leq 2 + 4\omega_{\mathcal{C}}(D')$.*

CHƯƠNG 4. PHÂN TÍCH MA TRẬN THÀNH TÍCH CÁC HOÁN TỬ ĐỐI HỢP

Vấn đề ước lượng độ dài hoán tử đối hợp của ma trận thuộc nhóm tuyến tính đặc biệt có hệ số trên trường đặc trưng khác 2 đã được X. Hou chỉ ra trong [9, Định lý 2.8]. Trong chương này, chúng tôi phân tích ma trận thành tích hoán tử đối hợp trên trường đặc trưng 2, trên đại số chia vô hạn và trên vành chia.

Chúng tôi bắt đầu với dạng hoán tử đối hợp của ma trận đường chéo cấp 2 trong $\mathrm{GL}_2(D)$.

Bổ đề 4.1.2. *Cho D là vành chia và $x \in D^*$. Khi đó,*

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^{-2} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & x \\ x^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

là hoán tử đối hợp.

Tiếp theo, chúng tôi phân tích các ma trận tam giác.

Định lý 4.1.3 ([II, Định lý 3.4])**.** *Cho D là đại số chia vô hạn và $n \geq 2$. Giả sử $A = BC$, trong đó $B \in \mathbb{LT}_n(D)$ và $C \in \mathbb{UT}_n(D)$. Khi đó, $\ell_{\mathcal{CI}}(A) \leq 2$.*

Để ước lượng độ dài hoán tử đối hợp của ma trận trên trường đặc trưng bằng 2, chúng tôi xét hai trường hợp. Nếu trường có vô hạn phần tử thì chúng tôi dựa theo kỹ thuật của X. Hou [9]. Nếu trường hữu hạn phần tử thì chúng tôi dựa trên kết quả của bổ đề dưới đây.

Bổ đề 4.2.1 ([2, Bổ đề 7])**.** *Cho F là trường có ít nhất bốn phần tử và $n \geq 2$. Giả sử $C = C(f)$ là ma trận bạn trong $\mathrm{GL}_n(F)$ tương ứng với* *đa thức f có bậc n, $\det C = ab$ và $a, b \in F^*$. Khi đó, $C = XY$, với X đồng dạng với $(a) \oplus A$ và Y đồng dạng với $(b) \oplus B$. Trong đó,*

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$$

và

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_\ell$$

với mọi $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_\ell$ là một trong các ma trận có dạng sau

(1) (1).

(2) $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}$, *trong đó $g \in F \setminus \{0, \pm 1\}$.*

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & q \end{pmatrix}$, *trong đó $q \in F^*$.*

Hơn nữa, A đồng dạng với A^{-1} và B đồng dạng với B^{-1}.

Dựa vào kết quả của bổ đề trên, chúng tôi đã tiến hành ước lượng độ dài của hoán tử đối hợp trong nhóm tuyến tính đặc biệt có hệ số trên trường và kết quả thu được như sau:

Định lý 4.2.5 ([VI, Định lý 1])**.** *Cho F là trường đặc trưng 2 có ít nhất ba phần tử và $n \geq 2$. Khi đó, mọi ma trận trong $\mathrm{SL}_n(F)$ là tích nhiều nhất hai hoán tử đối hợp.*

Hệ quả 4.2.6. *Cho F là trường có ít nhất ba phần tử và $n \geq 2$. Khi đó, $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(F)) = 2$.*

Dựa vào Bổ đề 2.3.10, chúng tôi cũng tiến hành ước lượng độ dài của hoán tử đối hợp của các ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_n(D)$, trong đó D là vành chia.

Từ ý tưởng từ [14], chúng tôi đã phát triển một kỹ thuật để phân tích ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(1, s)$ với s là hoán tử khác 1. Kết quả này được trình bày trong bổ đề dưới đây.

Bổ đề 4.3.1 ([II, Bổ đề 4.2]). *Cho D là vành chia không giao hoán. Nếu s là hoán tử khác 1 thì $\mathrm{diag}(1, s) = A_1A_2A_3$, trong đó A_i đồng dạng $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, với mỗi $i = 1, 2, 3$.*

Sau đó, chúng tôi ước lượng được độ dài hoán tử đối hợp của ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(1, \dots, 1, s)$, trong đó $s \in D'$.

Bổ đề 4.3.2 ([II, Bổ đề 4.3]). *Cho D là vành chia không giao hoán và $n \geq 2$. Giả sử rằng $A = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, s) \in \mathrm{GL}_n(D)$, trong đó s là hoán tử khác 1. Khi đó,*

(1) $\ell_{\mathcal{CI}}(A) \leq 3$ *nếu* $\mathrm{char}D \neq 2$.

(2) $\ell_{\mathcal{CI}}(A) \leq 3$ *nếu* $\mathrm{char}D = 2$ *và* $n > 2$.

(3) $\ell_{\mathcal{CI}}(A) \leq 6$ *nếu* $\mathrm{char}D = 2$ *và* $n = 2$.

Sử dụng ý tưởng chứng minh như trong Mệnh đề 3.3.4, chúng tôi ước lượng được độ dài đối hợp của ma trận trong các nhóm ma trận tam giác $\mathbb{UT}_n(D)$ và $\mathbb{LT}_n(D)$.

Bổ đề 4.3.5 ([III, Bổ đề 6.1]). *Giả sử D là vành chia không giao hoán và $n \geq 1$. Khi đó, mọi ma trận trong $\mathbb{UT}_n(D)$ hoặc $\mathbb{LT}_n(D)$ có thể viết thành dạng tích nhiều nhất hai hoán tử đối hợp trong $\mathrm{GL}_n(D)$. Đặc biệt, nếu $\mathrm{char}D \neq 2$ thì mỗi ma trận trong $\mathbb{UT}_n(D)$ hoặc $\mathbb{LT}_n(D)$ là hoán tử đối hợp.*

Cuối cùng, độ dài hoán tử đối hợp của ma trận trong nhóm tuyến tính đặc biệt trên vành chia được ước lượng.

Định lý 4.3.6 ([III, Định lý 6.3])**.** *Cho D là vành chia không giao hoán thỏa mãn $\omega_{\mathcal{C}}(D') < \infty$ và $n \geq 2$. Khi đó,*

(1) $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(D)) \leq 4 + 6\omega_{\mathcal{C}}(D')$ *nếu* $\mathrm{char}D = 2$ *và* $n = 2$.

(2) $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(D)) \leq 4 + 3\omega_{\mathcal{C}}(D')$ *nếu* $\mathrm{char}D = 2$ *và* $n > 2$.

(3) $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(D)) \leq 2 + 3\omega_{\mathcal{C}}(D')$ *nếu* $\mathrm{char}D \neq 2$.

Khi xét các ma trận trên đại số chia không giao hoán, chúng tôi đã ước lượng được độ dài hoán tử đối hợp tốt hơn trên vành chia. Kết quả được chỉ ra dựa trên Bổ đề 4.1.2 và Bổ đề 2.4.3.

Định lý 4.3.7 ([II, Định lý 4.6])**.** *Cho D là đại số chia không giao hoán sao cho $\omega_{\mathcal{C}}(D') < \infty$ và $n \geq 2$. Khi đó,*

(i) $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(D)) \leq 2 + 6\omega_{\mathcal{C}}(D')$ *nếu* $\mathrm{char}D = 2$ *và* $n = 2$.

(ii) $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(D)) \leq 2 + 3\omega_{\mathcal{C}}(D')$ *nếu* $\mathrm{char}D = 2$ *và* $n > 2$.

(iii) $\omega_{\mathcal{CI}}(\mathrm{SL}_n(D)) \leq 2 + 3\omega_{\mathcal{C}}(D')$ *nếu* $\mathrm{char}D \neq 2$.

Chương 5. MỘT SỐ PHÂN TÍCH CỦA MA TRẬN TRÊN VÀNH CHIA QUATERNION THỰC $\mathbb{H}$

Trong chương này, chúng tôi phân tích ma trận thành tích của các hoán tử lũy đơn chỉ số 2 và các hoán tử đối hợp lệch trên vành chia quaternion thực, đồng thời trình bày các ví dụ minh họa. Những kết quả này đã được công bố trong [V] và trình bày trong [6].

Chúng tôi, bắt đầu ước lượng độ dài hoán tử lũy đơn chỉ số 2 bằng kết quả về phân tích ma trận đường chéo cấp 2.

Mệnh đề 5.2.3. *Nếu $a \in \mathbb{H}^*$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho $\lambda N(a) \neq \pm 1$ thì $\begin{pmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & (\lambda a)^{-1} \end{pmatrix}$ là hoán tử lũy đơn chỉ số 2.*

Bằng cách tính toán trực tiếp, chúng tôi đưa ra một khẳng định về tính chất của hoán tử lũy đơn chỉ số 2 trong nhóm $\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{H})$.

Mệnh đề 5.2.5. *Cho $A \in \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{H})$ với $n \geq 1$. Nếu A là hoán tử lũy đơn chỉ số 2 thì 1 là trị riêng phải của A.*

Theo [13], mọi ma trận trong nhóm $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ luôn đồng dạng với ma trận dạng Jordan có hệ số trên trường số phức $\mathbb{C}$.

Bổ đề 5.2.6 ([13, Hệ quả 3.5]). *Cho $n \geq 2$ và $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$. Khi đó, tồn tại $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ sao cho*

$$S^{-1}AS = J_{m_1}(\lambda_1, 1) \oplus \cdots \oplus J_{m_k}(\lambda_k, 1) \qquad (*)$$

trong đó $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ là các số phức và $m_1 + \cdots + m_k = n$. Ta gọi ma trận ở vế phải của $(*)$ là dạng Jordan của A.

Từ Bổ đề 5.2.6, chúng tôi thu được mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 5.2.7 ([V, Mệnh đề 2.4]). *Cho D là vành chia và $n \geq 2$. Nếu $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ là hoán tử lũy đơn chỉ số 2 thì A không đồng dạng với ma trận có dạng Jordan chứa $J_m(-1,1)$, trong đó m lẻ.*

Bằng phương pháp chứng minh phản chứng, chúng tôi đã ước lượng được độ dài hoán tử lũy đơn chỉ số 2 của ma trận $-\mathrm{I}_{2n+1}$.

Định lý 5.2.9 ([V, Định lý 1.1]). *Cho $n \geq 1$. Khi đó, ma trận $-\mathrm{I}_{2n+1}$ có thể viết thành tích của ba hoán tử lũy đơn chỉ số 2 trong nhóm $\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{H})$ và 3 là số tốt nhất.*

Để khẳng định 3 là số tốt nhất, chúng tôi đã phân tích ma trận

$$-\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Định lý 5.2.9 khẳng định rằng [8, Định lý 1.1] không đúng khi áp dụng cho ma trận có hệ số trên $\mathbb{H}$. Sau đó, chúng tôi ước lượng độ rộng hoán tử lũy đơn chỉ số 2 cho nhóm $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$.

Định lý 5.2.11 ([V, Định lý 1.2]). *Cho $n \geq 2$ và $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$. Khi đó, A là tích của nhiều nhất hai hoán tử lũy đơn chỉ số 2 trong $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$, trừ trường hợp n là số lẻ và $A = -\mathrm{I}_n$.*

Hệ quả 5.2.12 ([V, Hệ quả 1.3]). $\omega_{\mathcal{CU}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})) = 3$.

Liên quan đến việc nghiên cứu ma trận thành tích các hoán tử đối hợp lệch. Trong [11, Định lý 3.2], Joven và Paras đã chỉ ra rằng nếu F là trường có ít nhất bốn phần tử thì mọi $A \in \mathrm{SL}_{2n}(F)$ có dạng là tích của nhiều nhất bốn ma trận đối hợp lệch. Mặt khác, một hoán tử đối hợp lệch cũng là tích của hai ma trận đối hợp lệch. Vì vậy, chúng tôi tiếp tục ước lượng độ dài hoán tử đối hợp lệch của ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$.

Chúng tôi chỉ ra tồn tại một ma trận đường chéo không là hoán tử đối hợp lệch.

Ví dụ 5.3.2. *Trong nhóm* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$, *ta có* $\mathrm{diag}(2,..,2,2^{1-n}i)$ *không là hoán tử đối hợp lệch.*

Do đó, theo Ví dụ 5.3.2, $\omega_{\mathcal{CSI}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}))$ nhận giá trị từ 2 trở lên và chúng tôi đã chỉ ra được 2 là giá trị tốt nhất.

Định lý 5.3.3 ([6, Định lý 4.1])**.** *Giả sử* $n \geq 2$. *Khi đó,*

$$\omega_{\mathcal{CSI}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})) = 2.$$

Chương 6. PHÂN TÍCH MA TRẬN VÔ HẠN THÀNH TÍCH CÁC HOÁN TỬ VÀ TÍCH CÁC MA TRẬN ĐỐI HỢP

Bằng cách tính toán trực tiếp, công thức ma trận nghịch đảo của ma trận tam giác trên vô hạn được chỉ ra trong bổ đề dưới đây.

Bổ đề 6.1.2. *Cho D là vành chia và $A = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} x_{ij}\mathbf{e}_{ij} \in \mathrm{T}_\infty(D)$. Nếu*

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} x'_{ij}\mathbf{e}_{ij}$$

thì $x'_{ii} = x_{ii}^{-1}$ và $x_{ii}x'_{ij} + x_{i(i+1)}x'_{(i+1)j} + \cdots + x_{ij}x'_{jj} = 0$ với $1 \leq i < j$. Hơn nữa, với mỗi số nguyên dương k, phần tử

$$x'_{i(i+k)} = -x_{ii}^{-1}x_{i(i+k)}x_{(i+k)(i+k)}^{-1} + c$$

trong đó c là biểu thức của $x_{i'j'}$ và $x'_{i'j'}$ trong đó $j' - i' < k$.

Dựa trên cách chọn phần tử trong Bổ đề 2.4.5, chúng tôi chỉ ra được rằng:

Định lý 6.2.1 ([I, Định lý 1.1])**.** *Cho D là đại số chia vô hạn và $A \in \mathrm{T}_\infty(D)$. Nếu các phần tử trên đường chéo chính của A là hoán tử thì tồn tại $B, C \in \mathrm{T}_\infty(D)$ sao cho B là ma trận đường chéo có các phần tử đôi một không liên hợp và $A = BCB^{-1}C^{-1}$. Hơn nữa, nếu $A \in \mathbb{UT}_\infty(D)$ thì với mỗi ma trận đường chéo vô hạn B có các hệ số đôi một không liên hợp, tồn tại $C \in \mathbb{UT}_\infty(D)$ sao cho $A = BCB^{-1}C^{-1}$.*

Hệ quả 6.2.3 và Định lý 6.2.6 là phiên bản trên vành chia của [1, Định lý 1.4].

Hệ quả 6.2.3 ([I, Hệ quả 1.3]). *Nếu D là đại số chia có nhiều hơn ba phần tử thì*

$$[\mathrm{GL}_{VK,\infty}(D), \mathrm{GL}_{VK,\infty}(D)] = \mathrm{SL}_{VK,\infty}(D).$$

Định lý 6.2.6 ([I, Định lý 1.4]). *Giả sử D là trường vô hạn hoặc vành chia quaternion thực. Khi đó, mọi ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_{VK,\infty}(D)$ đều có dạng là hoán tử.*

Để hoàn thiện về phân tích ma trận vô hạn trong nhóm Vershik–Kerov, bằng những kỹ thuật của các chương trước chúng tôi đánh giá độ rộng đối hợp của nhóm con hoán tử $\mathrm{SL}_{VK,\infty}(D)$ của nhóm Vershik–Kerov.

Với mỗi $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, ta giả sử $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ là một phân hoạch của $\mathbb{N}$ và đặt

$$J_{|N_\lambda|}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Đầu tiên, chúng tôi phân tích ma trận tam giác trên có vô hạn có các phần tử trên đường chéo bằng 1.

Bổ đề 6.3.1. *Cho vành chia D và $A \in \mathbb{UT}_\infty(D)$. Khi đó, A đồng dạng với $\oplus_{\lambda\in\Lambda} J_{|N_\lambda|}(1,1)$, trong đó $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ là một phân hoạch của $\mathbb{N}$ và $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$.*

Bổ đề 6.3.2 ([VII, Lemma 2]). *Cho vành chia D và $A \in \mathbb{UT}_\infty(D)$. Khi đó,*

(1) *Mọi ma trận $\mathbb{UT}_\infty(D)$ có thể viết thành dạng tích của nhiều nhất hai ma trận đối hợp trong $\mathrm{GL}_{c,\infty}(D)$.*

(2) *Mọi ma trận trong* $\mathbb{UT}_\infty(D)$ *có thể viết thành một hoán tử đối hợp của các ma trận trong* $\mathrm{GL}_{c,\infty}(D)$*, khi* $\mathrm{char}D \neq 2$.

Cuối cùng là kết quả về phân tích ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_{VK,\infty}(D)$ thành tích các ma trận đối hợp.

Định lý 6.3.3 ([VII, Định lý 1])**.** *Cho* D *là đại số chia không giao hoán. Giả sử* $\omega_{\mathcal{C}}(D') < \infty$*. Khi đó, mọi ma trận trong* $\mathrm{SL}_{VK,\infty}(D)$ *là tích của nhiều nhất* $8\omega_{\mathcal{C}}(D') + 4$ *ma trận đối hợp trong* $\mathrm{GL}_{c,\infty}(D)$.

Chương 7. KẾT LUẬN

Chúng tôi đã thực hiện một số nghiên cứu về phân tích ma trận trên vành chia. Trong định hướng nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi tập trung vào việc giải quyết những vấn đề dưới đây:

- Ước lượng độ dài hoán tử của các ma trận trong nhóm $\mathrm{SL}_{VK,\infty}(D)$ khi D là vành chia có số chiều lớn hơn bốn.
- Nghiên cứu các vấn đề mở trong [IV].

Tài liệu tham khảo

[1] A. Bier, W. Holubowski, *A note on commutators in the group of infinite triangular matrices over a ring,* Linear Multilinear Algebra. **63** (2015), 1534–1542.

[2] J. D. Botha, *On a unification result by A.R. Sourour concerning commutators and products of involutions*, Linear Algebra Appl. **416** (2006), 872–879.

[3] P. M. Cohn, *Skew Field Constructions*, Cambridge University Press, London, 1977.

[4] E. A. Egorchenkova, N.L. Gordeev, *Products of commutators on a general linear group over a division algebra*, J. Math. Sci. **243** (2019), 561–572.

[5] W.H. Gustafson, P.R. Halmos, H. Radjavi, *Products of involutions,* Linear Algebra Appl. **13** (1976), 157–162.

[6] N. T. T. Ha, T. N. N. Hung and D. T. Toan, *Decomposition of matrices into products of commutators of skew-involutions.* Submitted

[7] X. Hou và W. Li, *Commutator of skew-involutions,* Electron. J. Linear Algebra. **40** (2024), 729–738.

[8] X. Hou, *Decomposition of matrices into commutators of unipotent matrices of index 2*, Electron. J. Linear Algebra. **37** (2021), 31–34.

[9] X. Hou, *Decomposition of infinite matrices into products of commutators of involutions*, Linear Algebra Appl. **563** (2019), 231–239.

[10] T. W. Hungerford, *Algebra*, Springer, 2012.

[11] J. P. E. Joven, A. T. Paras, *Products of skew-involutions,* Electron. J. Linear Algebra. **39** (2023), 136–150.

[12] F. Knüppel, K. Nielsen, *$SL(V)$ is 4-reflectional,* Geom. Dedicata. **38** (1991) 301–308.

[13] T. A. Loring, *Factorization of matrices of quaternions*, Expo. Math. **30** (2012), 250–26.

[14] B. B. Phadke, *Products of tranvections*, Can. J. Math. **6** (1974), 1412–1417.

[15] J. H. Wang and P. Y. Wu, *Products of unipotent matrices of index* 2, Linear Algebra Appl. **149** (1991), 111-123.

[16] B. Zheng, *Decomposition of matrices into commutators of involutions*, Linear Algebra Appl. **347** (2002), 1–7.

Danh mục công trình của tác giả

[I] M. H. Bien, T. H. Dung, N. T. T. Ha, *A certain decomposition of infinite invertible matrices over division algebras*, Linear Multilinear Algebra. **71** (2023), 1948–1956. https://doi.org/10.1080/03081087.2022.2091508.

[II] M. H. Bien, T. H. Dung, N. T. T. Ha, T. N. Son, *Decompositions of matrices over division algebras into products of commutators*, Linear Algebra Appl. **646** (2022), 119–131. https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.03.025.

[III] M. H. Bien, T. H. Dung, N. T. T. Ha, T. N. Son, *Involution widths of skew linear groups generated by involutions,* Linear Algebra Appl. **679** (2023), 305–326. https://doi.org/10.1016/j.laa.2023.09.019.

[IV] N. T. T. Ha, *A survey of lengths of linear groups with respect to certain generating sets*, Commun. Korean Math. Soc. **39** (2024), No. 2, 279–302 https://doi.org/10.4134/CKMS.c230058.

[V] N. T. T. Ha and D. T. Toan, *Products of commutators of unipotent matrices of index* 2 *in* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$, Int. Electron. J. Algebra. **36** (2024), 121-133 https://doi.org/10.24330/ieja.1476670.

[VI] T. N. Son, T. H. Dung, N. T. T. Ha, M. H. Bien, *On decompositions of matrices into products of commutators of involutions,* Electron. J. Linear Algebra. **33** (2022), 123–130. https://doi.org/10.13001/ela.2022.6797 .

[VII] Truong Huu Dung and Nguyen Thi Thai Ha, *Covering numbers with involutions in decomposing infinite Matrices,* Math. Commun. **30** (2025), 27–37.